Egzamin z matematyki dyskretnej

23 czerwca 2022 r.

Część teoretyczna

Podaj precyzyjne definicje i dokładne sformułowania następujących pojęć i twierdzeń (występujące w nich oznaczenia proszę też zdefiniować):

1. Zasada włączeń i wyłączeń.
2. Liczba Stirlinga II rodzaju – definicja kombinatoryczna i wzór rekurencyjny.
3. Liczba Catalana – precyzyjnie opisany przykład interpretacji kombinatorycznej i wzór rekurencyjny.
4. Wzór na liczbę rozwiązań równania $x_1 + ... + x_k = n$, gdzie $n, k \geqslant 1$, w liczbach naturalnych dodatnich.
5. Lemat Burnside'a, podający wzór na liczbę orbit danej grupy przekształceń skończonego zbioru.
6. Graf Eulera i twierdzenie o charakteryzacji grafów Eulera.
7. Drzewo i twierdzenie Cayleya (o liczbie pewnych drzew).
8. Wzór Eulera, dotyczący grafów planarnych.
9. Liczba chromatyczna grafu.
10. Skojarzenie pełne w grafie dwudzielnym i twierdzenie Halla.

Egzamin z matematyki dyskretnej

23 czerwca 2022 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Udowodnij, znajdując interpretację kombinatoryczną, że dla dowolnych liczb naturalnych $n,\ k \geqslant 1$ zachodzi tożsamość

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \begin{bmatrix} n-i \\ k \end{bmatrix} i! = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\left[{n \atop k}\right]$ oznacza liczbę Stirlinga I rodzaju, czyli liczbę permutacji zbioru $[n] = \{1, \ldots, n\}$ o dokładnie k cyklach.

Zadanie 2. Znajdź wzór (może być w postaci sumy) wyrażający, dla ustalonych liczb naturalnych $m, n \geqslant 1$, liczbę wszystkich ciągów $(X_1, \ldots, X_m)$ długości m podzbiorów zbioru $[n] = \{1, \ldots, n\}$ takich, że $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i = [n]$ i każdy ze zbiorów $X_1, \ldots, X_m$ ma nieparzystą liczbę elementów.

Zadanie 3. Dwa przystające czworościany foremne sklejono podstawami.

Na ile geometrycznie różnych sposobów (uwzględniamy wyłącznie obroty) można pomalować ściany otrzymanej bryły (każdą jednym kolorem), mając do dyspozycji 7 kolorów?

Zadanie 4. Udowodnij, że każdy graf $G = (V, E)$ o $n \geqslant 2$ wierzchołkach, którego każde dwa niesąsiadujące wierzchołki $u, v \in V$ spełniają warunek

$$d(u) + d(v) \geqslant n - 1,$$

jest spójny.

Zadanie 5. Dany jest graf $G = (V, E)$, o zbiorze wierzchołków $V = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ i zbiorze krawędzi

$$E = \big\{\{A, B\} : A, B \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \wedge |A \bigtriangleup B| = 1\big\},$$

gdzie $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ jest różnicą symetryczną zbiorów A i B.

Ile jest w grafie G tras $(A_0, A_1, \ldots A_n)$ długości $n \geqslant 4$ o początku w wierzchołku $A_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ i końcu w wierzchołku $A_n = \emptyset$ takich, że $A_i \neq \emptyset$ dla każdego $i < n$ (inne wierzchołki, poza końcowym, mogą się powtarzać)?

Wskazówka: na jakimś etapie rozwiązania warto osobno rozważyć przypadki, gdy n jest liczbą nieparzystą i gdy n jest liczbą parzystą; w szczególności można (choć nie jest to jedyna możliwość) uwzględnić te przypadki już na etapie tworzenia odpowiedniego układu równań rekurencyjnych.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej, czytelnie podpisanej** *kartce.*